MATHÉMATIQUES

Groupe C

DURÉE : 4 heures

Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on pose :

$$G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{n}}$$

On pose également : $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

On désignera par $\bar{z} = x - iy$ le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$.

Les trois parties I, II, III sont indépendantes.

I

1° Calculer G_1, G_2, G_3, G_4. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^{kr}$ où r est un élément fixé de $\mathbb{Z}$.

2° Décomposer en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^5 - 1$. En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$ en fonction de $\sqrt{5}$. Calculer G_5.

3° Soit $A = (a_{r,s})_{r,s=1,n}$ et $B = (b_{r,s})_{r,s=1,n}$ deux matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On appelle trace de A, et on note tr A, la somme des coefficients de la diagonale principale :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{r=1}^{n} a_{r,r}.$$

Montrer que : tr AB = tr BA.

Montrer que, si A est semblable à une matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

alors on a :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r.$$

4° On considère la matrice A_n :

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_n & \zeta_n^2 & \dots & \zeta_n^{n-1} \\ 1 & \zeta_n^2 & \zeta_n^4 & \dots & \zeta_n^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \zeta_n^{n-1} & \zeta_n^{2(n-1)} & \dots & \zeta_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} = (a_{r,s})$$

avec : $a_{r,s} = \zeta_n^{(r-1)(s-1)}$.

Montrer que tr $A_n = G_n$. Montrer que A_n^2 s'exprime simplement en fonction de B_n :

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = (b_{r,s})$$

.../...

avec : $b_{r,s} = 1$ si $r + s = 2$ ou $r + s = n + 2$,

$b_{r,s} = 0$ si non.

Calculer B_n^2.

5° Montrer que, si λ est valeur propre de la matrice carrée A, λ^2 est valeur propre de la matrice A^2. En déduire que la matrice A_n a, au plus, 4 valeurs propres.

6° Soit U une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, et I la matrice unité d'ordre n. On associe à U et I les endomorphismes u et id de $\mathbb{C}^n$ dont les matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sont U et I. On suppose que $U^2 = I$. On désigne par $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ le noyau et l'image de l'endomorphisme u. Montrer que :

$$\ker(u - id) \cap \ker(u + id) = \{0\},$$
$$\operatorname{Im}(u + id) \subset \ker(u - id),$$
$$\dim \ker(u - id) + \dim \ker(u + id) = n.$$

En déduire que toute matrice U vérifiant $U^2 = I$ est diagonalisable.

7° Montrer que la matrice B_n définie au 4° est diagonalisable. Lorsque n est impair (on posera $n = 2p + 1$) expliciter une base dans laquelle B_n est diagonale.

8° Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et u un endomorphisme de E. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré d, dont on suppose que toutes les racines sont simples. On pose : $u^2 = u \circ u$, ..., $u^k = u^{k-1} \circ u$. Montrer que, si $P(u) = 0$, l'endomorphisme u est diagonalisable. On pourra raisonner par récurrence sur d.

9° Montrer que :

$$G_n \, \overline{G}_n = \sum_{0 \leq r \leq n-1} \left(\sum_{0 \leq s \leq n-1} \zeta_n^{(r+s)^2 - r^2} \right)$$

et en déduire que : $|G_n| = \sqrt{n}$ lorsque $n = 2p + 1$ est impair.

10° Montrer que la matrice A_n, définie au 4°, est semblable à une matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Montrer que les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne prennent que 4 valeurs $\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $i\sqrt{n}$, $-i\sqrt{n}$. On désignera par a, b, c, d le nombre de fois que ces valeurs respectives sont prises.

Montrer que, si n est impair, $n = 2p + 1$, on a :

$$a + b = p + 1 \,; \qquad c + d = p \,;$$
$$(a - b)^2 + (c - d)^2 = 1.$$

On admettra que l'on peut démontrer — en calculant le déterminant de A_n — la relation :

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = i^{p(2p+1)} \, n^{n/2}.$$

Montrer alors que $(b + d)$ a la même parité que p. Calculer a, b, c, d, et en déduire la valeur de G_n lorsque n est impair.

II

1° Soit $t \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{N}$, $K \neq 0$. Calculer :

$$\sum_{k=-K}^{K} e^{-2i\pi k t}.$$

Montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2K + 1)\pi t}{\sin \pi t} \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin(2K + 1)\pi t}{\sin \pi t} \, dt = \frac{1}{2}.$$

.../...

2° Soit g une fonction en escalier réelle sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_a^b g(x) \sin mx \, dx = 0 .$$

Soit maintenant g une fonction continue réelle sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_a^b g(x) \sin mx \, dx = 0 .$$

3° Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable à droite en 0 et à gauche en 1. On pose :

$$S_K = \sum_{k=-K}^{K} \int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi kt} \, dt .$$

Montrer que l'on a :

$$S_K = \int_0^1 f(t) \frac{\sin (2K+1)\pi t}{\sin \pi t} \, dt .$$

Montrer que les fonctions :

$$g_1(t) = \frac{f(t) - f(0)}{\sin \pi t} \qquad \text{et} \qquad g_2(t) = \frac{f(t) - f(1)}{\sin \pi t}$$

se prolongent par continuité sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ respectivement. En déduire que la suite S_K a une limite que l'on calculera.

4° Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable en tout point, et soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Montrer que l'on a :

$$\frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) =$$

$$= \lim_{K \to +\infty} \left(\sum_{k=-K}^{K} \int_0^n f(t)\, e^{-2i\pi kt} \, dt \right)$$

III

1° Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx$ est convergente (on pourra intégrer par parties).

Montrer que les intégrales

$$\alpha = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx \qquad \text{et} \qquad \beta = \int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx$$

sont convergentes.

On pose pour $n > 0$:

$$\gamma_n = \int_0^{+\infty} e^{2i\pi n x^2} \, dx .$$

Calculer γ_n en fonction de α et β.

2° Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\int_0^1 e^{2i\pi n (x^2 - kx)} \, dx = \varepsilon_k(n) \int_{\frac{k}{2}-1}^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n u^2} \, du$$

où $\varepsilon_k(n)$ est un nombre que l'on précisera et qui dépend de la parité de k.

Montrer que la limite suivante existe et la calculer en fonction de α et β :

$$\lim_{K \to +\infty} \left(\sum_{k=-K}^{+K} \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2 - kx)} \, dx \right)$$

3° En appliquant la question II 4° à la fonction $f(t) = e^{\frac{2i\pi t^2}{n}}$, calculer G_n pour tout $n \geqslant 1$ et déterminer les valeurs de :

$$\alpha = \int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx \qquad \text{et} \qquad \beta = \int_0^{+\infty} \sin x^2 \, dx .$$

FIN